§ ΧΩΡΟΙ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ας θεωρήσουμε το χώρο $M_{n\times n}(\mathbb{R}) = M_{n\times n}$ των $n\times n$ πινάκων με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς. Ο χώρος $M_{n\times n}$ μπορεί να ταυτιστεί με τον $\mathbb{R}^{n^2}$ μέσω της απεικόνισης

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \to \underbrace{(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nn})}_{n^2\text{-στοιχεία}}$$

Έστω $Gl(n)$ οι $n\times n$-πίνακες με μη μηδενική ορίζουσα, δηλαδή:

$$Gl(n) = \{A \in M_{n\times n} : \det A \neq 0\}$$

Θ.δ.ο ο χώρος αυτός είναι διαφορίσιμο πολύπτυγμα διάστασης n^2.

Πραγματική συνάρτηση $f: M_{n\times n} \simeq \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$f(A) = \det A$ είναι συνεχής ως πολυωνυμική.

Άρα $Gl(n) = f^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ και επειδή $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ είναι ανοικτό σύνολο $\Rightarrow f^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ είναι ανοικτό, οπότε $Gl(n)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $M_{n\times n} = \mathbb{R}^{n^2}$ και άρα είναι πολύπτυγμα διάστασης n^2.

Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε το σύνολο $SL(n)$ των $n \times n$ πινάκων με ορίζουσα 1, δηλαδή

$SL(n) = \{A \in M_{n\times n} : \det A = 1\}$. Εάν $f: M_{n\times n} = \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(A) = \det A$, τότε βλέπουμε ότι $SL(n) = f^{-1}(1)$

Όμως $\{1\} \subseteq \mathbb{R}$ είναι κλειστό υποσύνολο $\Rightarrow SL(n) \subseteq \mathbb{R}^{n^2}$ είναι κλειστό υποσύνολο. Α.ν.δ.ο. το σημείο 1 είναι κανονική τιμή της f. Αυτό σημαίνει ότι δοθέντος $A = (a_{ij}) \in SL(n)$, $\exists$ ζεύγος δεικτών ούτως ώστε

$$\frac{\partial \det}{\partial a_{ij}}(A) \neq 0.$$

Θυμίζουμε ότι από το ανάπτυγμα της ορίζουσας ως προς την i-γραμμή λαμβάνουμε ότι:

$\det(A) = (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1} + \ldots + (-1)^{i+n} a_{in} M_{in}$, όπου M_{ij} είναι η ελάσσων ορίζουσα.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ας υποθέσουμε σε αντίθεση ότι $\dfrac{\partial \det(A)}{\partial a_{ij}} = (-1)^{i+j} M_{ij} = 0$ για μεμονωμένο i και κάθε $j \in \{1, \ldots, n\}$. Τότε

$$\left\{\begin{array}{l} 0 = M_{i1} \\ 0 = M_{i2} \\ \vdots \\ 0 = M_{in} \end{array}\right. \Rightarrow \det(A) = 0$$

Άτοπο, διότι από υπόθεση $\det(A) = 1$, άρα το 1 κανονική τιμή της F και $SL(n)$

πολύπτυγμα διάστασης n^2-1.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ας θεωρήσουμε την ομάδα $O(n)=\{A\in M_{n\times n}: A^t A = I\}$ (ομάδα ορθογώνιων πινάκων). Θ.δ.ο. $O(n)$ είναι διαφ. πολύπτυγμα. Θεωρούμε την απεικόνιση $f: M_{n\times n} = \mathbb{R}^{n^2} \to Sym(n)$, με $F(A) = A^t A$, όπου $Sym(n)$, ο χώρος των συμμετρικών πινάκων, δηλαδή

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι μπορούμε να ταυτίσουμε το $Sym(n) = \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

Ας υπολογίσουμε το διαφορικό της f.
Έχουμε $\partial f_A(B) = \lim\limits_{n\to 0} \dfrac{f(A+nB)-f(A)}{n} =$

$$\lim_{n\to 0} \frac{(A+nB)^t(A+nB)-A^tA}{n} =$$

$$\lim_{n\to 0} \frac{n(A^tB+B^tA)+n^2B^tB}{n} = A^tB+B^tA$$

Επίσης, $\forall A\in O(n)$ και $S\in Sym(n)$ $\exists B$ με $\partial f_A(B) = S$.

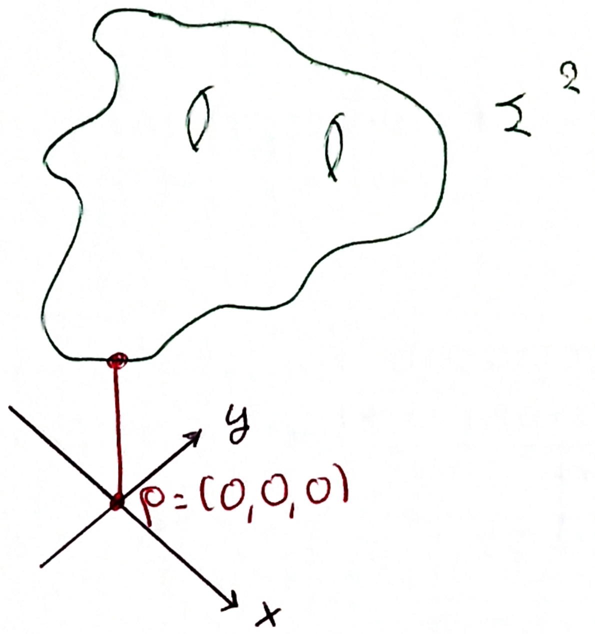
Πράγματι, ένα τέτοιο B είναι το $\frac{1}{2}AS$. Επομένως,

$\operatorname{rank} df = \dim sym(n) = \frac{n(n+1)}{2}$, άρα $O(n)$ διαφ.

πολλαπλ. διάστασης $n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια επιφάνεια $\Sigma^n \subseteq \mathbb{R}^3$, της οποίας η εξίσωση δίνεται στη μορφή $\Phi(x,y,z)=0$, όπου $\Phi:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ μια διαφορίσιμη συνάρτηση. Ας υποθέσουμε ότι p είναι 1 σημείο εκτός Σ^2. Πως μπορούμε να βρούμε την απόσταση του p από την Σ^2;



ΙΔΕΑ Ας υποθέσουμε χβγ ότι $p=(0,0,0)$.
Η απόσταση από το $(0,0,0)$ περιγράφεται μέσω της συνάρτησης $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

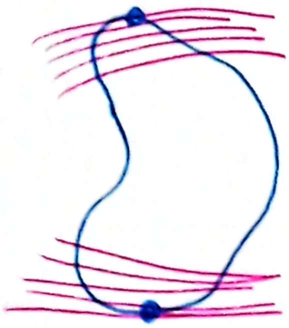
Το ερώτημα είναι να βρούμε το ελάχιστο της f όταν τα x, y, z δεν είναι ελεύθερα, αλλά πληρούν τη συνθήκη $\Phi(x,y,z)=0$. Δηλαδή, το πρόβλημα είναι να βρούμε $\begin{cases} \min f = ? \\ \Phi(x,y,z)=0 \end{cases}$

Η πρώτη ιδέα είναι να λύσουμε την εξίσωση $\Phi(x,y,z)$ ως προς μια μεταβλητή και να αντικαταστήσουμε στη f και μετά να δουλεύουμε με συνάρτηση δύο μεταβλητών. Όμως, υπάρχουν τεχνικές δυσκολίες: Δεν μπορούμε να έχουμε "κλειστό τύπο" της λύσης ως προς μια μεταβλητή.

Θέλουμε μια πιο "κομψή γεωμετρική ιδέα". Για να περιγράψουμε την ιδέα ας "ρίξουμε" λίγο ακόμα τη διάσταση.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

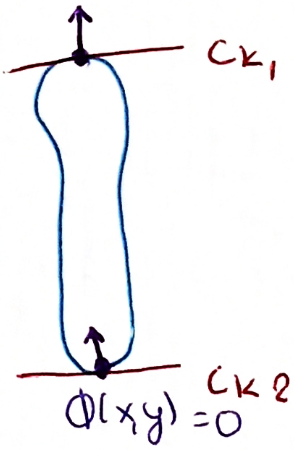
Ας υποθέσουμε ότι έχουμε καμπύλη με παράσταση $\Phi(x,y)=0$ και θέλουμε να βρούμε τα ακρότατα μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ υπό τη συνθήκη $\Phi=0$



$\Phi(x,y)=0$

Το πρόβλημα που μόλις διατυπώσαμε ισοδύναμα περιγράφεται ως εξής: Απ' όλες τις καμπύλες $C_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : F(x,y)=k\}$ που τέμνουν την Φ, ποια είναι εκείνη με το μεγαλύτερο ή με το μικρότερο k?

Με άλλα λόγια θέλουμε να βρούμε ποια από τις καμπύλες C_k έχει εφαπτόμενο σημείο επαφής με τη $\phi=0$



Για να συμβεί αυτό πρέπει C_k και $\varphi=0$ να εφάπτονται, άρα πρέπει να έχω στο σημείο επαφής, ίδιο εφαπτόμενο και ίδιο κάθετο. Άρα πρέπει στο σημείο επαφής $\nabla f = \lambda \nabla \phi$.

Ο λ δεν χρειάζεται να προσδιοριστεί και λέγεται πολλαπλασιαστής Lagrange.

Θεώρημα

Έστω $f, \phi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι δύο C^1-διαφορίσιμες συναρτήσεις που ορίζονται επί ενός ανοικτού συνόλου $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Εάν $(x_0, y_0) \in U$ είναι σημείο, όπου η f λαμβάνει τοπικό ακρότατο υπό τη συνθήκη $\phi=0$ και αν $\nabla\phi(x_0,y_0) = (\phi_x(x_0,y_0), \phi_y(x_0,y_0)) \neq (0,0)$, τότε $\exists\, \lambda \in \mathbb{R} : \nabla f(x_0,y_0) = \lambda \nabla \phi(x_0,y_0)$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} f_x(x_0,y_0) = \lambda \phi_x(x_0,y_0) \\ f_y(x_0,y_0) = \lambda \phi_y(x_0,y_0). \end{cases}$$